

ちょっと大きい普遍 Teichmüller 空間の構成に向けて

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻

松田 凌 (Ryo Matsuda) *

概要

通常, Riemann 面 S の Teichmüller 空間とは, S の擬等角写像を用いて構成される. しかしながら, 擬等角写像の退化版とみなせる David class による S の変形が普遍 Teichmüller 空間の境界に現れる例がいくつか見つかった. そこで, そのような退化擬等角写像たちをも内点とみなせるような “ちょっと大きな Teichmüller 空間” を構成したくなる. 講演では構成やそれらの性質, また展望について述べたい.

1 動機

Teichmüller 空間論と呼ばれる, Riemann 面の Moduli 理論がある. これは, 簡単に言えば, 2 次元の向きづけられた位相多様体に定まる複素構造の変形空間である. いわゆる代数幾何における Riemann 面の Moduli 空間の普遍被覆であるが, 単にそれだけではない様々な応用, 発展がある. 複素力学系や三次元双曲幾何と相互に刺激し合いながら発展した Teichmüller 空間論は, あまたある “Moduli 理論” の中で最も成功したものの一つと言っても過言ではない. 実際, いくつもの分野で, “ $\mathbb{O}\mathbb{O}$ -Teichmüller 理論” と呼ばれるアナロジーの存在が示すように, いまだに影響を与え続けている. 本講演では, 函数論的な Teichmüller 空間論を中心に, 無限型 Riemann 面と関連した研究を紹介したいと思う.

まず, タイトルについて説明する必要がある. 数学的に表現するならば,

普遍 Teichmüller 空間 (解析的無限型 Riemann 面) の Teichmüller 空間を構成する際の標識のクラスを, David map に取り替え, 通常の Teichmüller 空間を含み, 位相幾何的な情報が意味を持つ^{*1}が, 通常の Teichmüller 空間と同様の (複素) 解析学が展開できるものを構成したい

とかける. 最初に何のためにこのようなことを考えるのか, 動機について少し述べる.

1.1 強すぎる Riemann の写像定理

Poincaré 曰く, 数学とは異なるものを同一視する学問であるらしい. 一般に, 何らかの構造 (ノルム, 位相, 多様体構造など) を持つ二つの対象がその構造を保つ写像で写り合うならば, それらを区別しないのが普通である. 例えば, 線型空間であれば線形同型, 位相空間であれば同相写像などが該当す

* E-mail: matsuda.ryou.82c@st.kyoto-u.ac.jp

^{*1} この意味で, 解析的有限型 Riemann 面の Teichmüller 空間と近いと思いたい

る。函数論では、等角写像 (双正則写像) がそれにあたる。ところが、二つの領域に等角写像が存在するための条件として、非常に強力な次の定理が知られている:

Theorem 1.1 (Riemann の写像定理). $\Omega \subset \mathbb{C}$ は単連結かつ $\#\mathbb{C} \setminus \Omega \geq 2$ とする. このとき, Ω と $\mathbb{D}$ の間には双正則写像が存在する.

したがって、単連結であって $\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ と違うものは、全て $\mathbb{D}$ と区別がつかないということがわかる。ところが、函数論的な性質が全て同じか? と考えてみると、なにか違う気がしてくる・・・

$$A := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z = x + iy \mid x = 1/2^n, 0 < y < 1 - 1/2^n\}$$

どうみても、領域 A は“ナンカチガウ”。トポロジーの言葉を借りるなら、領域の局所連結性が違う。 $\mathbb{D}$ は $\mathbb{S}^1$ であるが、もう片方は違う。そうすると、調和関数の性質が違って来るように思える。(cf. Fatou の補題: $\mathbb{D}$ 上の有界調和関数は境界での振る舞いだけで決定される。)

なら、境界が $\mathbb{S}^1$ と同相だったら、函数論的な性質が全て同じであらうか。これも違う。

ハートの領域の外側 (図の白い方に注目) を考える。 $\hat{\mathbb{C}}$ で補集合をとればこれは単連結である。 $\mathbb{D}$ 内の点列が境界に近づくときは、非接極限と接極限が考えられる。一方で、ハートの外側の領域では、谷間のところで非接極限と接極限を区別して考えることができない。

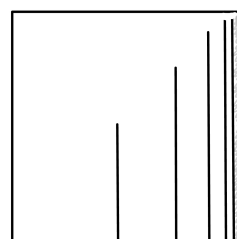


図1 A のイメージ

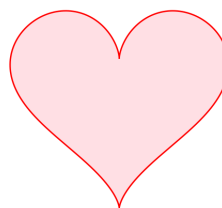


図2 ハートの外側

1.2 解析で切り開く低次元トポロジー

上の例からわかるように、単連結かつ境界が $\mathbb{S}^1$ と同相 (そのような領域は Jordan 領域と呼ばれる) だからといっても、函数論的な性質が完全に一致しなさそうである。難しいことは考えなくても、上で考えた、“ナンカチガウ”を、表現したり説明できるようになりたい。普遍 Teichmüller 空間は、 $\mathbb{D}$ の函数論的な性質が同じような Jordan 領域の集まりに見える。そこで、私はほんのちょっとだけ、普遍 Teichmüller 空間 (とその境界) に現れる Jordan 領域が、Riemann の写像定理より函数論にとって適切な同一視を与えてくれるのではないかと期待する。そこで、普遍 Teichmüller 空間 (とその境界) に現れる図形たちの特徴づけが、(少なくとも私にとっての) 大きな目標である。

2 準備

Teichmüller 空間といっても、定義の仕方や解釈の仕方はいくつもある。例えば、

などがある。他にも、考える境界として、Thurston 境界 / Bers 境界 / Gardiner-Masur 境界などがある。これらの組み合わせだけバリエーションがあり、それぞれの関係性についての研究もある。

*2 今回は、解析的無限型 Riemann 面の複素構造の変形空間とみなし、境界として Bers 境界を考える。以下では、それらに必要な事柄とここまでの文章に現れた単語のできる限り明確な定義を与える。しかしながら、この研究分野を簡潔に述べる能力を持ち得ないので、もし興味を持たれた場合は、[IT, Gar]などを参照することをお勧めする。

2.1 双曲構造 v.s. 等角構造 (複素構造)

本稿では、主に複素構造の変形空間として Teichmüller 空間を定義するが、やはり、双曲構造の変形空間としての側面を無視するわけにはいかない。

Definition 2.1. X を実 2 次元の向きづけられた位相多様体とする。 X の Atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が次の条件: $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{H}$ であって、 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ が等角 / (双曲距離に関して) 等長 となるとき、Atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を等角構造*3/ 双曲構造 という。また、そのような Atlas を持つとき、 X は等角構造*4/ 双曲構造を許容するという。

実 2 次元の幾何には、奇跡が起こっている。それは、等角構造と双曲構造が一致することにある。正確には次のように述べられる:

Theorem 2.2 (一意化定理). X を、種数 g の曲面から $0 \geq n \geq \infty$ を除いたものとする。 $3g-3+n > 0$ を満たすか、無限大か、 $\mathbb{S}^1$ と同相な境界を持つならば X が双曲構造を許容することと、等角構造を許容することは同値である。

上の仮定を満たす X のことを双曲型という。4 種類の Riemann 面を除いて、全て双曲型であることが知られている。また、 $3g-3+n \leq 0$ であっても、複素構造を許容する。

Definition 2.3. X を実 2 次元の向きづけられた位相多様体とする。 X の複素構造 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ との組み $(X, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda})$ を一次元複素多様体 (Riemann 面) という。

2.2 解析的有限 v.s. 解析的無限

種数 $g \geq 0$ の Compact Riemann 面からたかだか n 個の点 (puncture という) を除いたものを有限型 Riemann 面という。種数が無限大であって、 $\mathbb{S}^1$ と同相な境界を持つものを第二種無限型 Riemann 面といい、そうでないものを第一種無限型 Riemann 面という。この解析的有限 / 無限 の区別は、それらの Teichmüller 空間が有限次元になるか無限次元になるかを区別している。第一種 / 第

*2 組み合わせによっては定義されていないものもある。例えば、解析的無限型の場合、Thurston 境界を定義することも難しい。

*4 一変数函数論の一般論から、実 2 次元においては、等角構造と複素構造は一致するため、本稿では同一視する。

二種は、無限次元になる原因が異なっていることを区別している。注意しておくべきことは、第二種無限型 Riemann 面は、種数が有限の場合もありうる。これらの Riemann 面の変形理論は、トポロジーからの制約を受けることがあり、ある種の剛性定理が成立することがある。このようなトポロジーを考慮せず、複素構造の変形のみを考える際には $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ の Teichmüller 空間を考えることがある。これを普遍 Teichmüller 空間という。

2.3 Teichmüller 空間

手始めに、Compact な実 2 次元の向きづけられた位相多様体 X の Teichmüller 空間を定義する。 X と同相な Riemann 面 R と向きを保つ同相写像 $f : X \rightarrow R$ の組み (R, f) を標識付き Riemann 面といい、 f を標識という。二つの標識付き Riemann 面 $(R_1, f_1), (R_2, f_2)$ が Teichmüller 同値であるとは、ある 等角写像 $c : R_1 \rightarrow R_2$ が存在して、 $c \circ f_1$ と f_2 が isotopic であることをいう。つまり、ある連続写像 $H(t, x) : [0, 1] \times X \rightarrow R_2$ が存在して、 $H(0, x) = c \circ f_1, H(1, x) = f_2$ を満たし、各 $t \in [0, 1]$ ごとに、 $H(t, \cdot) : X \rightarrow R_2$ は同相写像であることをいう。また、

$$\mathcal{T}_X := \{(R, f) \mid \text{標識付き Riemann 面}\} / \text{Teichmüller 同値}$$

を、 X の Teichmüller 空間という。通常、 X と同相な Riemann 面全体を等角同値で割ったものを Moduli 空間という。Moduli 空間も Teichmüller 空間も、いずれも X を Riemann 面とみなせる Atlas を全て集めてきたものである。一方で、Moduli 空間と Teichmüller 空間の違いは、標識をつけることにある。標識のおかげで、例えば X 上の本質的単純閉曲線がどんなふうに変形されたか、とか、基本群の生成系はどう対応したか、という位相幾何学的な情報を利用することができる。

ところで、Compact であることを用いると、標識として微分同相写像を取ることが知られている。向きを保つ微分同相写像とは、次で述べる擬等角写像になっており、これを用いることで、Teichmüller 空間に構造を導入することができる。

2.3.1 擬等角写像

Definition 2.4 (平面擬等角写像). $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし、 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ を向きを保つ中への同相写像とする。このとき、 f が次の条件：

1. $f \in W_{loc}^{1,2}(\mathbb{C})$
2. $\exists k \in [0, 1]$ s.t. $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$ a.e.

を満たすとき、 $K := \frac{1+k}{1-k}$ として、 K - 擬等角写像 (K-qc) という。 K を f の最大歪曲度といい、 $K(f)$ と書く。

一つ目の条件は、解析的な条件であって今はあまり重要視しないでおく。二つ目の条件は、幾何的な説明ができる。 Ω 上の C^1 級写像 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ が正則であるための条件として、Cauchy-Riemann 方程式:

$$f_{\bar{z}} = 0 \text{ on } \Omega$$

が知られている。これは、接写像と言葉で書くと、

$$T_z f = \begin{pmatrix} f_x & -f_y \\ f_y & f_x \end{pmatrix}$$

であるから、 $T_z \Omega$ の単位円を、 $T_{f(z)} \mathbb{C}$ の単位円に写すことがわかる。一方、擬等角写像については、 $T_z \Omega$ の単位円を $T_{f(z)} \mathbb{C}$ の楕円に写す。楕円の長軸と短軸は、 $\frac{|dz|+|d\bar{z}|}{|dz|-|d\bar{z}|}$ で抑えられる。つまり、定義域上一様に、楕円の歪み度合いが K で抑えられているものが、擬等角写像の特徴である。

f を K -擬等角写像とする。 $\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ は、可測 かつ L^∞ ノルム : $\|\mu_f\|_\infty \leq k := \frac{K-1}{K+1} < 1$ かつ、

$$f_{\bar{z}} = \mu_f f_z$$

なる偏微分方程式を満たす。 μ_f を方程式の Beltrami 係数、方程式を Beltrami 方程式という。これらは、実に次元の Riemann 幾何において、等温座標と密接な関係を持っている。 Beltrami 方程式と擬等角写像の関係として次が知られている。

Theorem 2.5 (Measurable Riemann mapping Theorem ([Ahl], Chapter 5, B, Theorem 5)). $\mathbb{C}$ 上の可測写像 μ で、 $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たすものに対して、 μ を Beltrami 係数にもつ $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像が存在する。特に、 $0, 1$ (自動的に ∞ も) を固定するという条件で一意的に決まる。

2.3.2 擬等角写像と Fuchs 群を用いた Teichmüller 空間の定義

Riemann 面 X が与えられたとき、被覆理論の一般論から、普遍被覆 $p : \mathbb{H} \rightarrow X$ と離散群 $\Gamma < PSL(2; \mathbb{R})$ が存在して、 X と軌道空間 $\mathbb{H}/\Gamma$ は同型になる。Fuchs 群の変形を介して Riemann 面の変形を定義したいと思う。

$$L^\infty(\Gamma) := \left\{ \mu \in L^\infty \left| \mu \circ \gamma \cdot \frac{\bar{\gamma}'}{\gamma'} = \mu \ (\forall \gamma \in \Gamma) \right. \right\}, \quad \text{Bel}(\Gamma) := \{ \mu \in L^\infty(\Gamma) \mid \|\mu\|_{L^\infty} < 1 \}$$

とおく。このとき、 $\mu \in \text{Bel}(\Gamma)$ に対して、 $\overline{\mu(\bar{z})}$ と拡張したものを定理 2.5 に適用すると、擬等角写像 $f^\mu : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ が手に入る。 μ が満たす条件 $\mu \circ \gamma \cdot \frac{\bar{\gamma}'}{\gamma'} = \mu$ によって、

$$\Gamma^\mu := f^\mu \Gamma \circ (f^\mu)^{-1} < PSL(2; \mathbb{R})$$

がわかる。つまり、軌道空間 $\mathbb{H}/\Gamma, \mathbb{H}/\Gamma^\mu$ の間に写像 $\tilde{f}^\mu : \mathbb{H}/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma^\mu$ が誘導される。これは、局所座標ごとに表示すると、擬等角写像になっていることがわかる。したがって、 $\text{Bel}(\Gamma)$ の各元は Riemann 面 $\mathbb{H}/\Gamma$ の変形を与える。次に Teichmüller 同値に相当する条件を定義する必要がある。 $\mu, \nu \in \text{Bel}(\Gamma)$ に対して、 $\mathbb{R}$ 上で $f^\mu = f^\nu$ が成り立つとき円周同値であるという。

Proposition 2.6. 標識つき Riemann 面 $(\mathbb{H}/\Gamma^\mu, \tilde{f}^\mu), (\mathbb{H}/\Gamma^\nu, \tilde{f}^\nu)$ が Teichmüller 同値であることと、 μ と ν が円周同値であることは同値である。ただし、 $\mathbb{H}/\Gamma$ が $\mathbb{S}^1$ と同相な境界を持つ場合は、その境界を固定する isotomic を考えることとする。

この命題によって、Riemann 面 X の Teichmüller 空間として、 $\text{Teich}(X) := \text{Bel}(\Gamma)/\text{円周同値}$ と定義する。擬等角写像を用いることで、 $\text{Teich}(X)$ に距離構造を容易に導入できる。

Definition 2.7 (Teichmüller 距離). $\text{Teich}(X)$ 上に,

$$d_T([\mu], [\nu]) := \frac{1}{2} \inf \log K(w_{\bar{\mu}} \circ w_{\bar{\nu}})$$

とおく. ここに, $\inf$ は $\mu' \in [\mu], \nu' \in [\nu]$ 全体でとる.

Theorem 2.8 ([Ahl]). $(\text{Teich}(X), d_T)$ は完備距離空間である.

さらに, Teichmüller 空間を複素 Banach 空間の開部分集合として実現することができる.

2.3.3 Klein 群と Teichmüller 空間

Definition 2.9.

$$B(\Gamma) := \{ \varphi_{\mathbb{H}^*} \text{ 上の } \Gamma \text{ に関する正則二次微分 } \|\varphi\|_{B(\Gamma)} := \|\rho_{\mathbb{H}^*}^{-2} \varphi\|_{\infty} < \infty \}$$

とおく. ただし, $\rho_{\mathbb{H}^*}^{-2}$ は $\mathbb{H}^*$ 上の Poincaré 計量である. また, 正則二次微分とは,

$$\varphi \circ \gamma \cdot (\gamma')^2 = \varphi$$

を満たすことをいう.

Theorem 2.10 (Bers embedding[Ber]). Γ を *Fuchs* 群とする. このとき, $\mathcal{B} : \text{Teich}(\Gamma) \ni [\mu] \mapsto \{f_{\mu}, z\} \in B(\Gamma)$ は像の上への同相写像であって, $\Delta_{B(\Gamma)}(0; 2) \subset \mathcal{B}(\text{Teich}(\Gamma)) \subset \text{Cl}(\Delta_{B(\Gamma)}(0; 6))$ を満たす. (ここに, $\{f, z\} := \frac{f'''}{f'}(z) - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'}(z) \right)^2$. また, f_{μ} とは, $\mathbb{H}$ 上で μ , $\mathbb{H}^*$ で 0 とした *Beltrami* 係数に対する 0, 1 を固定する擬等角写像である.)

この定理によって, Bers 埋め込みを介して, Teichmüller 空間には複素構造が定めることができる. また, Riemann-Roch の定理から, $\mathbb{H}/\Gamma$ が解析的有限な双曲型 Riemann 面ならば, $B(\Gamma)$ は $3g - 3 + n$ 次元であることがわかる. つまり, Teichmüller 空間は複素 $3g - 3 + n$ 次元の多様体である. 解析的無限型ならば, $B(\Gamma)$ も無限次元である. いずれの場合も, $B(\Gamma)$ の有界領域になっているから, $B(\Gamma)$ の位相を用いることで $\text{Teich}(X)$ の境界を構成できる. これを Bers 境界といい, $\partial_{\text{Bers}} \text{Teich}(X)$ とかく.

Bers 埋め込みと関連して, Klein 群の観点から埋め込まれた Teichmüller 空間の見方について少し述べる. 各 $\varphi \in B(\Gamma)$ に対して, $\mathbb{H}^*$ 上の局所単葉函数で,

$$\{W_{\varphi}, z\} = \varphi, \quad W_{\varphi}(z) = (z + i)^{-1} + o(1) \text{ near } z = -i$$

を満たすものがただ一つ存在する. そこで, $B(\Gamma)$ の部分集合で次のようなものを定義する:

$$S(\Gamma) := \{ \varphi \in B(\Gamma) \mid W_{\varphi} \text{ は単葉} \},$$

$$T(\Gamma) := \{ \varphi \in S(\Gamma) \mid W_{\varphi} \text{ は } \mathbb{H} \text{ に擬等角拡張を持つ} \}$$

これは, $\mathcal{B}(\text{Teich}(X)) = T(\Gamma)$ であり, $\text{Cl}(T(\Gamma)) \subset S(\Gamma)$ が知られている.

各 $\varphi \in B(\Gamma)$ に対して, ある $\chi_{\varphi} : \Gamma \rightarrow PSL(2; \mathbb{C})$ であって,

$$\chi_{\varphi}(\gamma) \circ W_{\varphi} = W_{\varphi} \circ \gamma$$

を満たす準同型写像が定義される. $\varphi \in S(\Gamma)$ のとき, 像 $\chi_\varphi(\Gamma)$ は離散部分群であって, $\hat{\mathbb{C}}$ に作用する. 基本群 $\pi_1(X)$ と Γ が同型であったこと, $PSL(2; \mathbb{C})$ は三次元双曲空間の向きを保つ等長変換群と一致することに注意すると, $\chi_\varphi \in \text{Rep}(\pi_1(X), PSL(2; \mathbb{C}))$ ^{*5} とみなすことができる. これによって, 三次元双曲幾何との関連がここに生じる.

Definition 2.11 (regular b 群の分類). $\chi_\varphi(\Gamma)$ に対して, 次の条件を考える:

1. $\chi_\varphi(\Gamma)$ の不連続領域の連結成分が二つの時, 擬 Fuchs 群という.
2. $\chi_\varphi(\Gamma)$ の不連続領域の連結成分が一つの時, 全退化 b 群という.
3. ある双曲型の元 $\gamma \in \Gamma$ が存在して, $\chi_\varphi(\gamma)$ が放物型の元になる時, cusp という.

Theorem 2.12 (Bers [Ber], Maskit [Mas]). Γ が有限生成第一種 Fuchs 群とする. このとき, $\chi_\varphi(\Gamma)$ が擬 Fuchs 群ならば, $\varphi \in T(\Gamma)$ である.

また, $\varphi \in \partial T(\Gamma)$ ならば, $\chi_\varphi(\Gamma)$ は cusp または全退化 b 群である.

第一種 Riemann 面に対応する Fuchs 群の Teichmüller 空間とその Bers 境界に現れる Klein 群は Accola によって定義 2.11 が分類になっていることが知られている.

2.4 David 写像と Teichmüller 空間

Teichmüller 空間は, $\text{Bel}(\Gamma)$ の同値類であったことを思い出すと, その境界には $\|\mu\|_{L^\infty} = 1$ を満たすものによって得られそうである. 得られそうではあるが, $\|\mu\|_{L^\infty} = 1$ を満たす $L^\infty(\Gamma)$ に対応する Beltrami 方程式 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ に同相解があることから非自明である. これは, 次の定理が知られている:

Definition 2.13 (David 条件, 局所指数可積分条件). $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とする. $\mu \in L^\infty(U)$ が, ほとんど至るところ $|\mu|_\infty < 1$ かつ, ある $C, \alpha, \varepsilon_0 > 0$ が存在して,

$$\{|z \in \mathbb{C} \mid |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\}|_{\text{sph}} \leq C \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \quad (0 < \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0)$$

を満たすとき, $(C, \alpha, \varepsilon_0)$ -David 条件を満たすという. 特に, $(C, \alpha, \varepsilon_0)$ を必要としない時, 単に David 条件を満たすと言う. $|\cdot|_{\text{sph}}$ は球面測度とする. また, David 条件を満たす Beltrami 微分を, David-Beltrami 微分という. また, David-Beltrami 微分全体を $\text{Delt}(U)$ と書くこととする.

また, $\mu \in L^\infty(U)$ が, $K_\mu(z) := \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ に対して, ある $p \in (0, \infty)$ が存在して, $e^K \in L^p_{\text{loc}}$ を満たす時, μ は指数 L^p_{loc} 歪曲条件を満たすと言う.

Theorem 2.14 (Generalized Riemann mapping theorem, [Dav]). 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の可測関数 μ が David 条件を満たすとする. このとき, ある同相写像 $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(U)$ が存在し, $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ を満たす. また, 前からの等角写像の合成の差を除いて, f は一意的である.

定理 2.14 に適用して得られる解を David 写像という. David 写像によって得られる変形が実際に Teichmüller 空間の Bers 境界に存在することは証明されている:

^{*5} 詳細な定義は避けるが, 離散 かつ 忠実な表現全体を $PSL(2; \mathbb{C})$ 共軌で割ったものである.

Theorem 2.15 (M.). X を解析的無限型 *Riemann* 面であって、単純閉測地線が無限に存在するとする。また、

$$\inf\{\text{length}(\gamma) \mid \gamma \subset X \text{ 単純閉測地線}\} > 0$$

を満たし、無限本の測地線の族 $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ とある定数 $M > 0$ が存在して

$$\sup\{\text{length}(\gamma_n) \mid \gamma_n \subset X \text{ 単純閉測地線}\} < M$$

を満たす。このとき、 X の *Fuchs* 群モデル $\mathbb{H}/\Gamma$ とすると、次を満たす: $\text{Delt}(\mathbb{H}) \cap L^\infty(\Gamma) \neq \emptyset$ かつ $\mu \in \text{Delt}(\mathbb{H}) \cap L^\infty(\Gamma)$ が与える *David* 写像による変形が、 $\partial_{\text{Bers}} \text{Teich}(X)$ に存在する。

特に、*David* 写像による変形からなるような *Riemann* 面の正則族が存在する。またパラメーター空間として、無限次元なものができる。

David 写像による変形が *Teichmüller* 空間の境界に存在することは、定理 2.12 に反する。これを反例として捉えて終わり、と思うのではなく、今の定義で捉えられている変形された複素構造が不十分であると思う立場をとることもできる。そのような立場のもと、考察の対象とすべき *Riemann* 面たちを全て集めてきたような十分な *Teichmüller* 空間の構成を目指しているのがこの研究である。

3 ちょっと大きい *Teichmüller* 空間の後世に向けて (主結果)

以下では、*David-Beltrami* 微分の擬等角安定性および、その近傍で *Bers* 埋め込みが拡張して定義されること、およびその連続性についてまとめる。まず、計算を簡単にするため、

$$\text{Delt}(\mathbb{D}) := \{\mu \in L^\infty(\mathbb{D}) \mid \mu \text{ は David-Beltrami 微分}\}$$

として、support を $\mathbb{D}$ にしておく。このとき、球面測度と通常の *Lebesgue* 測度は比較可能なので、測度は全て *Lebesgue* 測度として良い。

3.1 擬等角安定性

David 写像による変形を擬等角写像で摂動することを考える。これには二つの摂動の方法がある:

Theorem 3.1 ((M.) *David Beltrami* 微分の右側擬等角安定性). *David Beltrami* 微分 μ は、擬等角安定である。つまり、 $\nu \in \text{Bel}(\mathbb{D})$ とし、 ν に対して、 $f^\nu : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ とする。このとき、 $\text{bel}(f_\mu \circ (f^\nu)^{-1}) \circ f^\nu$ は、 $(C', \alpha', \varepsilon'_0)$ -*David* 条件を満たす。

Theorem 3.2 ((M.) *David Beltrami* 微分の左側擬等角安定性). $\mu \in L^\infty(\mathbb{D})$ を *David-Beltrami* 微分とし、 f_μ をその *Beltrami* 方程式の同相解とし、 $\Omega_\mu := f_\mu(\mathbb{D})$ とする。このとき、任意の $\nu \in \text{Bel}(\Omega_\mu)$ に対して、 $\text{bel}(f_\nu \circ f_\mu) \in L^\infty(\mathbb{D})$ は再び *David* 条件を満たす。

これら二つの証明については、素朴な計算からわかるので、割愛する。

3.2 $\text{Delt}(\mathbb{D})$ の構造について

Proposition 3.3. 各 $\mu \in \text{Delt}(\mathbb{D})$ に対して,

$$\Lambda_\mu : \Delta_{L^\infty(\Omega_\mu)}(0; 1) \ni \nu \mapsto \text{bel}(f_\nu \circ f_\mu)$$

を考えると, これは $\text{Delt}(\mathbb{D})$ への写像であって, 単射連続になる. また, Λ_μ は *Fréche* 微分可能にもなる.

Proof. 定理 3.2 より, $\Lambda_\mu(\text{Bel}(\Omega_\mu)) \subset \text{Delt}(\mathbb{D})$ を満たす. また, Beltrami 微分の合成則より,

$$\text{bel}(f_\nu \circ f_\mu) = \frac{\theta_\mu^{-1} \nu \circ f_\mu + \mu}{1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu \circ f_\mu}$$

とかける. ここで, $\theta_\mu = (f_\mu)_z / \overline{(f_\mu)_z}$ とした. $\nu \in \Delta_{L^\infty(\Omega_\mu)}(0; 1)$ とし, 列 (ν_n) を ν に収束するものとする. このとき,

$$\|\Lambda_\mu(\nu_n) - \Lambda_\mu(\nu)\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を示す. 十分大きい n において, $\|\nu_n\|_{L^\infty} < 1$ としてよく,

$$\begin{aligned} & |\text{bel}(f_{\nu_n} \circ f_\mu) - \text{bel}(f_\nu \circ f_\mu)| \\ &= \left| \frac{\theta_\mu^{-1} \nu_n \circ f_\mu + \mu}{1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu_n \circ f_\mu} - \frac{\theta_\mu^{-1} \nu \circ f_\mu + \mu}{1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu \circ f_\mu} \right| \\ &= \left| \frac{(\theta_\mu^{-1} \nu_n \circ f_\mu + \mu)(1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu \circ f_\mu) - (\theta_\mu^{-1} \nu \circ f_\mu + \mu)(1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu_n \circ f_\mu)}{(1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu \circ f_\mu)(1 + \theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu_n \circ f_\mu)} \right| \\ &\leq \frac{(1 + |\mu|^2) \cdot |(\nu_n - \nu) \circ f_\mu|}{(1 - |\theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu \circ f_\mu|)(1 - |\theta_\mu^{-1} \bar{\mu} \nu_n \circ f_\mu|)} \\ &\leq \text{Const} \cdot |(\nu_n - \nu) \circ f_\mu| \leq \text{Const} \cdot \|\nu_n - \nu\|_{L^\infty(\Omega_\mu)}. \end{aligned}$$

よって, 連続性がわかる. 単射性は式の形からわかる. つまり, 各点に対して Möbius 変換の形をしていることからわかる.

Fréche 微分可能性も, Möbius 変換の形をしていることから良い. □

上の命題は, $\text{Delt}(\mathbb{D})$ のある種の多様体構造のようなものを与えているように見える. つまり,

$$\{\text{Delt}(\mathbb{D}), (\Lambda_\mu)_{\mu \in \text{Delt}(\mathbb{D})}\}$$

によって, $\text{Delt}(\mathbb{D})$ を多様体のようにみなせるということである. ただし, L^∞ -norm に関して開集合ではないことに注意しておく.

Theorem 3.4 ((M.) Extended Bers embedding). $\mu \in \text{Delt}(\mathbb{D})$ とする. $\Delta_{L^\infty(\Omega_\mu)}(0; 1) \ni \nu \mapsto S(f_{\Lambda_\mu(\nu)}) \in B(\mathbb{D}^*)$ は連続. 特に *Fréche* 微分可能である.

以上の事実から, $\text{Teich}(\mathbb{D}) = \text{Bel}(\mathbb{D})/\text{Teichmüller 同値}$ を包含する空間として, $\text{Delt}(\mathbb{D})/\text{Teichmüller 同値}$ が定義され, Bers 埋め込みの拡張を介して観察することで解析的構造を持つことがわかったことになる.

3.3 いくつかの注意および今後の課題

まず, Λ_μ の微分 $d_0\Lambda_\mu$ は有界線形作用素であるが, 閉作用素ではない. 実際,

$$d_0\Lambda_\mu(\nu) = (1 - |\mu|)\nu$$

という形をしており, $\mu \in \text{Delt}(\mathbb{D}) \setminus \text{Bel}(\mathbb{D})$ から取れば, 閉ではないことがわかる.

次の仕事は二つある. $\text{Delt}(\mathbb{D})$ が開集合ではない. そこで, L^∞ -norm ではない位相を定義することで $\text{Delt}(\mathbb{D})$ を開集合とみなせるか? である. これができれば, 本当の意味で, ちょっと大きい Teichmüller 空間と思える.

Extended Bers embedding を構成できたが, この (局所的な) 逆写像は構成できるだろうか? 紙面の関係で説明できないが, 通常の Teichmüller 空間の場合, Bers 埋め込みの局所的な逆写像として, Ahlfors-Weil 切断というものが存在する. これを David 写像に関しても構成できるかが問題になる.

参考文献

- [Ahl] Lars V. Ahlfors with appendix by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard, *Lectures on Quasiconformal Mappings* Second Edition (American Mathematical Society, 2006)
- [Ber] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, *Ann. of Math.* **91** (1970), 570–600.
- [Dav] G. David, Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\| = 1$, *Acta Math.* **173**(1994) 37–60.
- [Gar] Frederick. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and quadratic differentials*, John Wiley and Sons, 1987.
- [IT] Y. Iwayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer – Verlag, Tokyo, 1992.
- [Mas] B. Maskit, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II, *Ann. of Math.* **91** (1970), 607–639.
- [Mat] R. Matsuda, *New degeneration phenomenon for infinite-type Riemann surfaces*, arXiv: 2405.04178(2024).